Rachunek Prawdopodobieństwa

Anna Janicka

wykład V, 2.11.2021

DYSTRYBUANTA ZMIENNEJ LOSOWEJ – cd.

WARTOŚĆ OCZEKIWANA – INTRO.

Plan na dzisiaj

12. Ciągłe zmienne losowe – uzupełnienie
13. Dystrybuanta zmiennej losowej – cd.
    Kwantyle
14. Charakterystyki zmiennej losowej:
    wartość oczekiwana
    - dla zmiennej dyskretnej

12. Ciągłe zmienne losowe – przypomnienie

Definicja **ciągłej zmiennej losowej** i **gęstości zmiennej losowej**

Zmienna losowa X *ma* **rozkład ciągły**, *jeśli istnieje taka funkcja* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, *że dla dowolnego zbioru* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A g(x)dx$. *Wówczas funkcję* g *nazywamy* **gęstością (rozkładu) zmiennej** X.

12. Przykłady ciągłych zmiennych losowych

Przykłady rozkładów cd.

- rozkład jednostajny raz jeszcze
- rozkład wykładniczy
- **standardowy rozkład normalny**
- ogólny rozkład normalny
- delta Diraca

13. Dystrybuanta zmiennej losowej – przypomnienie

1. Definicja **dystrybuanty** zmiennej losowej

Dystrybuantą *zmiennej losowej* $X : \Omega \to \mathbb{R}$
nazywamy funkcję $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$
daną wzorem $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$.

zależy tylko od rozkładu

13. Dystrybuanta zmiennej losowej – przypomnienie

1. Definicja **dystrybuanty** zmiennej losowej

Dystrybuantą *zmiennej losowej* $X : \Omega \to \mathbb{R}$
nazywamy funkcję $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$
daną wzorem $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$.

zależy tylko od rozkładu

2. Przykłady dystrybuant dla zmiennych
   - jednopunktowej
   - dwupunktowej
   - rozkładu wykładniczego

13. Dystrybuanta zmiennej losowej – cd.

3. Twierdzenie 10 (własności dystrybuanty)

Dystrybuanta F_X zmiennej losowej X ma następujące własności:

(i) F_X *jest niemalejąca,*

(ii) $\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1,$

$\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0,$

(iii) F_X *jest prawostronie ciagła.*

4. Twierdzenie 11 (dystrybuanta→ rozkład)

Jeśli funkcja $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spełnia warunki (i)–(iii), to istnieje przestrzeń probabilistyczna* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *oraz zmienna losowa* $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, *taka że* F *jest dystrybuantą* X. *Co więcej, rozkład zmiennej* X *jest wyznaczony jednoznacznie.*

13. Dystrybuanta zmiennej losowej – cd. (2)

5. Dystrybuanta w rozkładzie dyskretnym
6. Twierdzenie 12 (dalsze własności dystrybuanty)

Jeśli F_X *jest dystrybuantą zmiennej losowej* X, *to dla* $t \in \mathbb{R}$ *zachodzi*
$F_X(t-) = \mathbb{P}(X < t)$ *oraz* $F_X(t) - F_X(t-) = \mathbb{P}(X = t)$.
W szczególności, jeśli F_X *jest ciągła w punkcie* t, *to* $\mathbb{P}(X = t) = 0$.

13. Dystrybuanta zmiennej losowej – cd. (3)

7. Twierdzenie 13 (wyznaczanie gęstości z dystrybuanty)

Niech F będzie dystrybuantą zmiennej losowej X.
1. Jeśli F nie jest ciągla, to X nie ma rozkładu ciągłego (tzn. nie ma gęstości).
2. Załóżmy, że F jest funkcją ciągłą.
Jeśli F jest różniczkowalna poza skończonym zbiorem punktów, to funkcja

$$g(t) = \begin{cases} F'(t) & \text{jeśli } F'(t) \text{ istnieje,} \\ 0 & \text{w p.p.,} \end{cases}$$

jest gęstością zmiennej X.

13. Dystrybuanta zmiennej losowej – cd. (4)

8. Przykłady wokół tw. 13
   - rozkład jednostajny
   - rozkłady, które nie są ciągłe ani dyskretne
9. Twierdzenie 14 (przekształcanie zmiennych a gęstość)

Jeżeli X jest zmienną losową o gęstości f oraz X przyjmuje wartości w przedziale (a,b), zaś funkcja $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 i $\varphi'(x) \neq 0$ dla $x \in (a,b)$, to zmienna losowa $Y = \varphi(X)$ ma rozkład ciągły o gęstości

$$g(y) = f(h(y))|h'(y)|1_{\varphi((a,b))}(y),$$

gdzie $h(s) = \varphi^{-1}(s)$.

13. Dystrybuanta zmiennej losowej – cd. (5)

10. Przykład zastosowania tw. 14

11. Definicja **kwantyla**

Niech X będzie zmienną losową, zaś $p \in [0,1]$.
Kwantylem rzędu *p zmiennej X nazywamy dowolną liczbę x_p, taką że*
$\mathbb{P}(X \leq x_p) = F_X(x_p) \geq p$ *oraz* $\mathbb{P}(X \geq x_p) \geq 1 - p$.
Kwantyl rzędu $1/2$ nazywamy także medianą.

12. Przykłady

14.1 Wartość oczekiwana rozkładu

1. Motywacja
2. Wartość oczekiwana zmiennej dyskretnej

Załóżmy, że X jest zmienną losową o rozkładzie dyskretnym, skoncentrowanym na zbiorze $S \subset \mathbb{R}$ i niech $p_x = \mathbb{P}(X = x)$ dla $x \in S$. Mówimy, że wartość oczekiwana zmiennej losowej X jest skończona (bądź że zmienna losowa X jest **całkowalna***), jeśli $\sum_{x \in S} |x| p_x < \infty$.*
Wówczas określamy **wartość oczekiwaną** *zmiennej X jako $\mathbb{E}X = \sum_{x \in S} x p_x$.*

inaczej wartość średnia, zależy tylko od rozkładu!

14.1 Wartość oczekiwana rozkładu – cd.

3. Przykłady liczenia wartości oczekiwanej

- zmienna jednopunktowa
- rzut kostką
- rozkład Bernoulliego (n,p)
- niecałkowalna zmienna dyskretna x2

szereg nie jest zbieżny

szereg nie jest absolutnie zbieżny