Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 5 lutego 2020r., grupa A

Aby uzyskać maksymalną liczbę punktów, z poniższych sześciu zadań należy zrobić pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, należy oddać sześć kartek. Każde z zadań będzie punktowane w skali $0-10$ *pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu.* ***Proszę na każdej kartce umieścić także oznaczenie grupy: A, B, C lub D****. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą. Czas trwania egzaminu: 120min.*

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = Cx\mathbb{1}_{\{x\geq 0, x+|y|\leq 3\}}$. Obliczyć C, $\mathrm{Cov}(X^2, Y+5)$ oraz $\mathbb{P}(Y \geq 1)$.

2. Zmienne X, Y, Z są niezależne, przy czym X ma rozkład normalny o średniej 1 i wariancji 1, Y ma rozkład normalny o średniej 1 i wariancji 2, a Z ma rozkład normalny o nieznanej średniej m oraz nieznanej wariancji σ^2.

a) Obliczyć $\mathrm{Cov}(X+Y, 2X-Y)$.

b) Wyznaczyć $\mathbb{E}\big((X+Y)\cos(2X-Y)|2X-Y\big)$.

c) Obliczyć m oraz σ^2, jeśli zmienne $X+Y+Z$ oraz $2Z$ mają ten sam rozkład.

3. Zainteresowanie klienta mierzone jest za pomocą współczynnika, o którym zakładamy, że jest zmienną losową Y o rozkładzie z gęstością $g_Y(y) = 2y\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$. Z badań statystycznych wynika, że jeśli zainteresowanie klienta wynosi y, to ilość X pieniędzy (mierzona w tysiącach złotych) wydanych w sklepie jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $(y, 2y)$.

a) Obliczyć gęstość dwuwymiarowej zmiennej (X, Y) oraz gęstość (bezwarunkową) zmiennej X.

b) Obliczyć $\mathbb{P}\big(X \geq 1|Y \leq 3/4\big)$.

4. Przypuśćmy, że wartości datków wrzucanych podczas kwesty do puszki przez kolejnych przechodniów można opisać niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że X_n – datek wrzucony przez n-tą osobę, w złotówkach – ma rozkład o średniej 10 i wariancji $\frac{4}{2^n}$, dla $n \geq 1$.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa - Bienaymé, oszacować z dołu prawdopodobieństwo, że łączna wartość datków wrzuconych do puszki przez pierwsze 10 osób zawierać się będzie w przedziale $(96, 104)$ złotych.

b) Wyznaczyć granicę, w sensie zbieżności według prawdopodobieństwa, dla średniej kwoty przypadającej podczas kwesty na jednego darczyńcę, jeśli wiadomo, że oprócz kwot wrzucanych do puszki przez przechodniów, zebrano również 1000 zł od 18 innych darczyńców.

5. Każdego dnia student udaje się na uczelnię, losowo wybierając środek transportu: tramwaj lub autobus, z prawdopodobieństwami 1/3 i 2/3, odpowiednio. Czas przejazdu tramwajem, mierzony w minutach, jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[20, 40]$, zaś czas przejazdu autobusem - zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[10, 50]$.

Zakładamy, że czasy przejazdów oraz decyzje studenta w różnych dniach są niezależne. Ponadto, student spóźnia się na zajęcia, jeśli jedzie wybranym środkiem transportu dłużej niż 35 minut.

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w trakcie 100 kolejnych dni student spóźni się na zajęcia co najmniej 30 razy.

b) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że dojeżdżając na uczelnię w ciągu 100 kolejnych dni, student spędzi w środkach transportu łącznie nie więcej niż 49 godzin.

6. W urnie znajdują się dwie kule: jedna biała i jedna czarna. Wykonujemy następujący nieskończony ciąg losowań: w każdym kroku wyciągamy jedną kulę i rzucamy symetryczną monetą. Jeśli wypadnie orzeł, kula wraca do urny; jeśli reszka, to przemalowujemy wyciągniętą kulę (na biało, jeśli jest czarna; na czarno, jeśli jest biała) i wrzucamy ją z powrotem do urny.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że po dwóch krokach urna będzie zawierać co najmniej jedną czarną kulę?

b) Obliczyć średnią liczby losowań, po których w urnie po raz pierwszy będą dwie czarne kule.

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 1000 losowaniach urna będzie zawierać dwie czarne kule.

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 5 lutego 2020r., grupa B

Aby uzyskać maksymalną liczbę punktów, z poniższych sześciu zadań należy zrobić pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, należy oddać sześć kartek. Każde z zadań będzie punktowane w skali $0-10$ *pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu.* ***Proszę na każdej kartce umieścić także oznaczenie grupy: A, B, C lub D****. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą. Czas trwania egzaminu: 120min.*

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = Cy\mathbb{1}_{\{y\geq 0, |x|+y\leq 3\}}$. Obliczyć C, $\mathrm{Cov}(X, Y^2 + 7)$ oraz $\mathbb{P}(X \geq 2)$.

2. Zmienne X, Y, Z są niezależne, przy czym X ma rozkład normalny o średniej 1 i wariancji 2, Y ma rozkład normalny o średniej 1 i wariancji 1, a Z ma rozkład normalny o nieznanej średniej m oraz nieznanej wariancji σ^2.

a) Obliczyć $\mathrm{Cov}(X + Y, X - 2Y)$.

b) Wyznaczyć $\mathbb{E}\big((X + Y)\sin(X - 2Y)|X - 2Y\big)$.

c) Obliczyć m oraz σ^2, jeśli zmienne $X + Y + Z$ oraz $3Z$ mają ten sam rozkład.

3. Zainteresowanie klienta mierzone jest za pomocą współczynnika, o którym zakładamy, że jest zmienną losową Y o rozkładzie z gęstością $g_Y(y) = \frac{1}{2}y\mathbb{1}_{(0,2)}(y)$. Z badań statystycznych wynika, że jeśli zainteresowanie klienta wynosi y, to ilość X pieniędzy (mierzona w tysiącach złotych) wydanych w sklepie jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $(y, 2y)$.

a) Obliczyć gęstość dwuwymiarowej zmiennej (X, Y) oraz gęstość (bezwarunkową) zmiennej X.

b) Obliczyć $\mathbb{P}\big(X \geq 2|Y \leq 3/2\big)$.

4. Przypuśćmy, że wartości datków wrzucanych podczas kwesty do puszki przez kolejnych przechodniów można opisać niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że X_n – datek wrzucony przez n-tą osobę, w złotówkach – ma rozkład o średniej 15 i wariancji $\frac{4}{2^n}$, dla $n \geq 1$.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa - Bienaymé, oszacować z dołu prawdopodobieństwo, że łączna wartość datków wrzuconych do puszki przez pierwsze 10 osób zawierać się będzie w przedziale $(145, 155)$ złotych.

b) Wyznaczyć granicę, w sensie zbieżności według prawdopodobieństwa, dla średniej kwoty przypadającej podczas kwesty na jednego darczyńcę, jeśli wiadomo, że oprócz kwot wrzucanych do puszki przez przechodniów, zebrano również 10000 zł od 180 innych darczyńców.

5. Każdego dnia student udaje się na uczelnię, losowo wybierając środek transportu: tramwaj lub autobus, z prawdopodobieństwami 2/3 i 1/3, odpowiednio. Czas przejazdu tramwajem, mierzony w minutach, jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[20, 60]$, zaś czas przejazdu autobusem - zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[30, 50]$.

Zakładamy, że czasy przejazdów oraz decyzje studenta w różnych dniach są niezależne. Ponadto, student spóźnia się na zajęcia, jeśli jedzie wybranym środkiem transportu dłużej niż 45 minut.

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w trakcie 100 kolejnych dni student spóźni się na zajęcia co najwyżej 30 razy.

b) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że dojeżdżając na uczelnię w ciągu 100 kolejnych dni, student spędzi w środkach transportu łącznie więcej niż 67 godzin.

6. W urnie znajdują się dwie kule: jedna biała i jedna czarna. Wykonujemy następujący nieskończony ciąg losowań: w każdym kroku wyciągamy jedną kulę i rzucamy symetryczną monetą. Jeśli wypadnie reszka, kula wraca do urny; jeśli orzeł, to przemalowujemy wyciągniętą kulę (na biało, jeśli jest czarna; na czarno, jeśli jest biała) i wrzucamy ją z powrotem do urny.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że po dwóch krokach urna będzie zawierać co najmniej jedną białą kulę?

b) Obliczyć średnią liczby losowań, po których w urnie po raz pierwszy pojawią się dwie białe kule.

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 1000 losowaniach urna będzie zawierać dwie białe kule.

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 5 lutego 2020r., grupa C

Aby uzyskać maksymalną liczbę punktów, z poniższych sześciu zadań należy zrobić pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, należy oddać sześć kartek. Każde z zadań będzie punktowane w skali $0-10$ *pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu.* ***Proszę na każdej kartce umieścić także oznaczenie grupy: A, B, C lub D****. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą. Czas trwania egzaminu: 120min.*

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = Cx\mathbb{1}_{\{x\geq 0, x+|y|\leq 4\}}$. Obliczyć C, $\mathrm{Cov}(2X^2, Y-3)$ oraz $\mathbb{P}(Y \geq 2)$.

2. Zmienne X, Y, Z są niezależne, przy czym X ma rozkład normalny o średniej -1 i wariancji 2, Y ma rozkład normalny o średniej 1 i wariancji 3, a Z ma rozkład normalny o nieznanej średniej m oraz nieznanej wariancji σ^2.

a) Obliczyć $\mathrm{Cov}(3X+Y, X-2Y)$.

b) Wyznaczyć $\mathbb{E}\big((3X+Y)\cos(X-2Y)|X-2Y\big)$.

c) Obliczyć m oraz σ^2, jeśli zmienne $X+Y+Z$ oraz $-2Z$ mają ten sam rozkład.

3. Zainteresowanie klienta mierzone jest za pomocą współczynnika, o którym zakładamy, że jest zmienną losową Y o rozkładzie z gęstością $g_Y(y) = 2y\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$. Z badań statystycznych wynika, że jeśli zainteresowanie klienta wynosi y, to ilość X pieniędzy (mierzona w tysiącach złotych) wydanych w sklepie jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $(y, 3y)$.

a) Obliczyć gęstość dwuwymiarowej zmiennej (X, Y) oraz gęstość (bezwarunkową) zmiennej X.

b) Obliczyć $\mathbb{P}\big(X \geq 1|Y \leq 2/3\big)$.

4. Przypuśćmy, że wartości datków wrzucanych podczas kwesty do puszki przez kolejnych przechodniów można opisać niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że X_n – datek wrzucony przez n-tą osobę, w złotówkach – ma rozkład o średniej 15 i wariancji $\frac{4}{2^n}$, dla $n \geq 1$.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa - Bienaymé, oszacować z dołu prawdopodobieństwo, że łączna wartość datków wrzuconych do puszki przez pierwsze 15 osób zawierać się będzie w przedziale $(220, 230)$ złotych.

b) Wyznaczyć granicę, w sensie zbieżności według prawdopodobieństwa, dla średniej kwoty przypadającej podczas kwesty na jednego darczyńcę, jeśli wiadomo, że oprócz kwot wrzucanych do puszki przez przechodniów, zebrano również 500 zł od 25 innych darczyńców.

5. Każdego dnia student udaje się na uczelnię, losowo wybierając środek transportu: tramwaj lub autobus, z prawdopodobieństwami 2/3 i 1/3, odpowiednio. Czas przejazdu tramwajem, mierzony w minutach, jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[10, 50]$, zaś czas przejazdu autobusem - zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[20, 40]$.

Zakładamy, że czasy przejazdów oraz decyzje studenta w różnych dniach są niezależne. Ponadto, student spóźnia się na zajęcia, jeśli jedzie wybranym środkiem transportu dłużej niż 35 minut.

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w trakcie 100 kolejnych dni student spóźni się na zajęcia co najwyżej 35 razy.

b) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że dojeżdżając na uczelnię w ciągu 100 kolejnych dni, student spędzi w środkach transportu łącznie więcej niż 51 godzin.

6. W urnie znajdują się dwie kule: jedna biała i jedna czarna. Wykonujemy następujący nieskończony ciąg losowań: w każdym kroku wyciągamy jedną kulę i rzucamy symetryczną monetą. Jeśli wypadnie reszka, kula wraca do urny; jeśli orzeł, to przemalowujemy wyciągniętą kulę (na biało, jeśli jest czarna; na czarno, jeśli jest biała) i wrzucamy ją z powrotem do urny.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że po dwóch krokach urna będzie zawierać białą i czarną kulę?

b) Obliczyć średnią liczby losowań, po których w urnie po raz pierwszy będą dwie czarne kule.

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 1000 losowaniach urna będzie zawierać co najmniej jedną białą kulę.

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 5 lutego 2020r., grupa D

Aby uzyskać maksymalną liczbę punktów, z poniższych sześciu zadań należy zrobić pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, należy oddać sześć kartek. Każde z zadań będzie punktowane w skali $0-10$ *pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu.* ***Proszę na każdej kartce umieścić także oznaczenie grupy: A, B, C lub D****. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą. Czas trwania egzaminu: 120min.*

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = Cy\mathbb{1}_{\{|x|+y\leq 4,\, y\geq 0\}}$. Obliczyć C, $\mathrm{Cov}(X + 2, 2Y^2)$ oraz $\mathbb{P}(X \geq 3)$.

2. Zmienne X, Y, Z są niezależne, przy czym X ma rozkład normalny o średniej 1 i wariancji 3, Y ma rozkład normalny o średniej -2 i wariancji 1, a Z ma rozkład normalny o nieznanej średniej m oraz nieznanej wariancji σ^2.

a) Obliczyć $\mathrm{Cov}(X + Y, X - 3Y)$.

b) Wyznaczyć $\mathbb{E}\big((X + Y)\sin(X - 3Y)|X - 3Y\big)$.

c) Obliczyć m oraz σ^2, jeśli zmienne $X + 2Y + Z$ oraz $2Z$ mają ten sam rozkład.

3. Zainteresowanie klienta mierzone jest za pomocą współczynnika, o którym zakładamy, że jest zmienną losową Y o rozkładzie z gęstością $g_Y(y) = \frac{1}{2}y\mathbb{1}_{(0,2)}(y)$. Z badań statystycznych wynika, że jeśli zainteresowanie klienta wynosi y, to ilość X pieniędzy (mierzona w tysiącach złotych) wydanych w sklepie jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $(y, 3y)$.

a) Obliczyć gęstość dwuwymiarowej zmiennej (X, Y) oraz gęstość (bezwarunkową) zmiennej X.

b) Obliczyć $\mathbb{P}\big(X \geq 1|Y \leq 1\big)$.

4. Przypuśćmy, że wartości datków wrzucanych podczas kwesty do puszki przez kolejnych przechodniów można opisać niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że X_n – datek wrzucony przez n-tą osobę, w złotówkach – ma rozkład o średniej 10 i wariancji $\frac{4}{2^n}$, dla $n \geq 1$.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa - Bienaymé, oszacować z dołu prawdopodobieństwo, że łączna wartość datków wrzuconych do puszki przez pierwsze 15 osób zawierać się będzie w przedziale $(146, 154)$ złotych.

b) Wyznaczyć granicę, w sensie zbieżności według prawdopodobieństwa, dla średniej kwoty przypadającej podczas kwesty na jednego darczyńcę, jeśli wiadomo, że oprócz kwot wrzucanych do puszki przez przechodniów, zebrano również 1000 zł od 15 innych darczyńców.

5. Każdego dnia student udaje się na uczelnię, losowo wybierając środek transportu: tramwaj lub autobus, z prawdopodobieństwami 1/3 i 2/3, odpowiednio. Czas przejazdu tramwajem, mierzony w minutach, jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[30, 50]$, zaś czas przejazdu autobusem - zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[20, 60]$.

Zakładamy, że czasy przejazdów oraz decyzje studenta w różnych dniach są niezależne. Ponadto, student spóźnia się na zajęcia, jeśli jedzie wybranym środkiem transportu dłużej niż 45 minut.

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w trakcie 100 kolejnych dni student spóźni się na zajęcia co najmniej 35 razy.

b) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że dojeżdżając na uczelnię w ciągu 100 kolejnych dni, student spędzi w środkach transportu łącznie nie więcej niż 66 godzin.

6. W urnie znajdują się dwie kule: jedna biała i jedna czarna. Wykonujemy następujący nieskończony ciąg losowań: w każdym kroku wyciągamy jedną kulę i rzucamy symetryczną monetą. Jeśli wypadnie reszka, kula wraca do urny; jeśli orzeł, to przemalowujemy wyciągniętą kulę (na biało, jeśli jest czarna; na czarno, jeśli jest biała) i wrzucamy ją z powrotem do urny.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że po dwóch krokach urna będzie zawierać tylko białe kule?

b) Obliczyć średnią liczby losowań, po których w urnie po raz pierwszy pojawią się dwie białe kule.

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 1000 losowaniach urna będzie zawierać dwie białe lub dwie czarne kule.